Ripartiamo alla grande!

Caro studente, per affrontare al meglio e con meno ansia il nuovo e impegnativo ciclo scolastico è importante riprendere e consolidare i concetti di base della matematica già affrontati nelle scuole medie. Ti invitiamo quindi a ripassare assieme a noi alcuni argomenti di teoria e ad esercitarti con questa raccolta di esercizi al fine di testare le tue attuali competenze...Buon lavoro!

I NUMERI NATURALI

L'insieme dei numeri naturali 0, 1, 2, 3, … viene indicato con la lettera **N**.
I numeri naturali possono essere rappresentati su una semiretta orientata: dati due numeri naturali, diversi tra loro, è sempre possibile stabilire infatti se il primo è maggiore del secondo o viceversa.
Nell'insieme **N** consideriamo in genere le 4 operazioni:
<u>addizione</u> $a + b$
<u>sottrazione</u> $a - b$
<u>moltiplicazione</u> $a \cdot b$ (che equivale ad eseguire il prodotto di a per se stesso per b volte)
<u>divisione</u> $a : b$ (in cui il divisore b deve essere diverso da 0).
Delle quattro operazioni, solo l'addizione e la moltiplicazione sono operazioni interne in **N**.
Una <u>potenza</u> con esponente maggiore di 1 è una moltiplicazione della base per se stessa tante volte quante sono indicate dall'esponente: $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ n volte
Ricorda: qualunque numero elevato a 1 dà come risultato se stesso e qualunque numero diverso da 0 elevato a 0 dà come risultato 1.

In un'<u>espressione</u>, le operazioni devono essere svolte in questo ordine:
1. elevamento a potenza;
2. moltiplicazione e divisione, nell'ordine in cui sono scritte;
3. addizione e sottrazione, nell'ordine in cui sono scritte.

Inoltre, le operazioni scritte tra parentesi hanno la precedenza: prima le parentesi tonde, poi le quadre, poi le graffe.

Talvolta è richiesto di tradurre un'espressione letterale in un'espressione numerica.
Ad esempio: "Dalla somma del quintuplo di *b* e del triplo di *a* sottrai il quadrato della differenza tra il doppio di *b* e il doppio di *a*"
In questo caso l'espressione richiesta è:
$(5b+3a) - (2b-2a)^2$

Proprietà dell'addizione:
<u>commutativa</u> $a + b = b + a$
<u>associativa</u> $(a + b) + c = a + (b + c)$

Proprietà della sottrazione:
<u>invariantiva</u> $a – b = (a + n) – (b + n)$ con $a \geq b$
$a – b = (a – n) – (b – n)$ con $a \geq b \geq n$

Proprietà della moltiplicazione:

commutativa $a \cdot b = b \cdot a$

associativa $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

distributiva a sinistra rispetto all'addizione $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

distributiva a destra rispetto all'addizione $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Proprietà della divisione:

invariantiva $a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$ con $b \neq 0$, $n \neq 0$ e a multiplo di b

$a : b = (a : n) : (b : n)$ con $b \neq 0$, $n \neq 0$, a multiplo di b e a e b multipli di n

distributiva a destra rispetto all'addizione $(a + b) : c = a : c + b : c$ con $c \neq 0$, a + b , a e b multipli di c

Proprietà delle potenze:

prodotto di potenze di uguale base $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

quoziente di potenze di uguale base $a^m : a^n = a^{m-n}$

potenza di una potenza $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ con $m \geq n$ e $a \neq 0$

prodotto di potenze di uguale esponente $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

quoziente di potenze di uguale esponente $a^n : b^n = (a : b)^n$ con $b \neq 0$ e a multiplo di b.

Un numero naturale a si dice multiplo di un numero naturale b se esiste un numero c che moltiplicato per b dà a.
Un numero naturale b (diverso da 0) si dice divisore di un altro numero naturale a se la divisione fra b e a dà come resto 0.
Un numero naturale (maggiore di 1) è primo quando è divisibile soltanto per 1 e per se stesso.
Ogni numero naturale non primo si può scomporre nel prodotto di fattori primi.
Il M.C.D. (massimo comune divisore) di due o più numeri diversi da 0, è il più grande dei divisori comuni ed è dato dal prodotto dei soli fattori primi comuni, ognuno preso una sola volta con l'esponente più piccolo.
Il m.c.m. (minimo comune multiplo) di due o più numeri naturali diversi da 0, è il più piccolo dei multipli comuni ed è dato dal prodotto di tutti i fattori primi, comuni e non comuni, presi ciascuno una sola volta con l'esponente più grande.

I NUMERI INTERI

L'insieme dei numeri interi **Z** è costituito dai numeri interi positivi, dai numeri interi negativi e dallo 0.
I numeri opposti sono i numeri con segno diverso ottenuti dallo stesso numero naturale.
Due interi, diversi da 0, sono concordi se hanno lo stesso segno, discordi se hanno segno diverso.
Il valore assoluto o modulo di un numero intero è il numero stesso se è positivo o è zero, è invece l'opposto del numero se è negativo.
La somma di due interi concordi è un intero che ha come valore assoluto la somma dei valori assoluti degli addendi e come segno il segno comune agli addendi.
La somma di due interi discordi è un intero che ha come valore assoluto la differenza fra il maggiore e il minore dei valori assoluti degli addendi e come segno il segno dell'addendo che ha valore assoluto maggiore.
Il prodotto di due interi ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti, segno positivo se i fattori sono concordi, segno negativo se i fattori sono discordi.

Il quoziente di due interi, di cui il primo multiplo del secondo, ha per valore assoluto il quoziente dei valori assoluti, segno positivo se dividendo e divisore sono concordi, segno negativo se dividendo e divisore sono discordi.
La potenza di un intero, con esponente naturale, ha per valore assoluto la potenza del valore assoluto e segno negativo se la base è negativa e l'esponente è dispari, segno positivo altrimenti.
In **Z** valgono le stesse proprietà delle operazioni e delle potenze che valgono in **N**.

I NUMERI RAZIONALI

Una frazione è una coppia ordinata di numeri a/bcon a e b naturali e b≠0.
Due frazioni a/be c/dsi dicono equivalenti se ab = cd.
Proprietà invariantiva: Moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore di una frazione per uno stesso numero diverso da zero si ottiene una frazione equivalente.
Ripartiamo l'insieme delle frazioni di numeri interi in classi di frazioni equivalenti: ogni classe d'equivalenza individua un numero razionale. Come rappresentante della classe si sceglie la frazione ridotta ai minimi termini. L'insieme dei numeri razionali si indica con **Q**.
Una volta definito **Q** come insieme, dobbiamo definire le operazioni in esso:
somma $(a/b)+(c/d) = (ad+bc)/bd$
sottrazione: $(a/b)-(c/d) = (ad-bc)/bd$
prodotto $(a/b)\cdot(c/d) = ac/bd$
divisione $(a/b):(c/d) = ad/bc$
potenza: $(a/b)^n = a^n/b^n$
potenza con esponente negativo: $(a/b)^{-n} = (b/a)^n = b^n/a^n$
Per tutte le operazioni valgono tutte le proprietà viste in **Z**.

I NUMERI DECIMALI

La rappresentazione decimale di un numero si basa sulla scrittura posizionale e sull'uso della virgola.
Le frazioni che hanno come denominatore una potenza di 10 (con esponente un naturale diverso da 0) vengono dette frazioni decimali.
Quando non è possibile trasformare una frazione in frazione decimale, significa che essa corrisponde a un numero decimale periodico, ossia a un numero le cui cifre decimali sono infinite e, da un certo punto in poi, si ripetono a gruppi sempre uguali. Il gruppo di cifre ripetute si chiama periodo, mentre l'insieme delle cifre comprese fra la virgola e il periodo si chiama antiperiodo.
Ogni numero razionale non intero è rappresentato da un numero decimale finito o periodico.
Esiste una regola che permette di scrivere ogni numero decimale periodico sotto forma di frazione, detta frazione generatrice del numero decimale. Si può dimostrare che la frazione generatrice di un numero decimale periodico si ottiene considerando la frazione avente:
come numeratore il numero, scritto senza virgola, diminuito del numero costituito da tutte le cifre che precedono il periodo;
come denominatore il numero costituito da tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.
Un numero irrazionale è un numero che non può essere espresso mediante una frazione, cioè ogni numero che non è razionale.
Ogni numero, sia razionale sia irrazionale, è un numero reale. L'insieme dei numeri reali si indica con **R**.

ELEMENTI DI GEOMETRIA DEL PIANO

Oggetti geometrici e proprietà Una figura geometrica è un qualsiasi insieme di punti. Lo spazio è l'insieme di tutti i punti. Fra le proprietà geometriche, alcune sono espresse mediante postulati: proprietà che accettiamo come vere. Le altre sono descritte da teoremi, ossia proposizioni che devono essere dimostrate.

<u>Postulati di appartenenza:</u>
1. A una retta appartengono almeno due punti distinti e a un piano almeno tre punti distinti non allineati.
2. Due punti distinti appartengono a una e una sola retta.
3. Tre punti distinti e non allineati appartengono a uno e un solo piano.
4. Considerata una retta su un piano, c'è almeno un punto del piano che non appartiene alla retta.
5. Se una retta passa per due punti di un piano, allora appartiene al piano.

<u>Postulati d'ordine:</u>
1. Se A e B sono due punti distinti di una retta, o A precede B, o B precede A.
2. Se A precede B e B precede C, allora A precede C.
3. Preso un punto A su una retta, c'è almeno un punto che precede A e uno che segue A.
4. Presi due punti B e C su una retta, con B che precede C, c'è almeno un punto A della retta che segue B e precede C.

Data una retta orientata e un suo punto O, sono <u>semirette</u>:
l'insieme formato da O e da tutti i punti che lo precedono;
l'insieme formato da O e da tutti i punti che lo seguono.

Data una retta orientata e i suoi punti A e B, con A che precede B, il <u>segmento</u> AB è l'insieme dei punti della retta formato da A, da B e dai punti che seguono A e precedono B.

Due segmenti sono:
<u>consecutivi</u> se hanno in comune solo un estremo;
<u>adiacenti</u> se sono consecutivi e appartengono alla stessa retta.

Data una retta r di un piano, un <u>semipiano</u> di origine r è l'insieme dei punti di r e di uno dei due insiemi in cui il piano è diviso da r.

In una <u>figura convessa</u>, presi due punti qualsiasi, il segmento che li congiunge è contenuto tutto nella figura. In una <u>figura concava</u> questa proprietà non è vera per almeno due punti.

Un <u>angolo</u> è ciascuna delle due parti di piano individuate da due semirette aventi la stessa origine, incluse le due semirette.

Due angoli sono:
<u>consecutivi</u> se hanno in comune il vertice e un lato e giacciono da parti opposte rispetto al lato in comune;
<u>adiacenti</u> se sono consecutivi e i lati non comuni appartengono alla stessa retta.

Un angolo è <u>piatto</u> quando i suoi lati appartengono alla stessa retta.
L'angolo <u>giro</u> è l'angolo che coincide con l'intero piano.

Due figure sono <u>congruenti</u> se sono sovrapponibili mediante un movimento rigido.

Dati nel piano i punti O e A, la circonferenza di centro O e raggio OA è l'insieme dei punti del piano che hanno da O distanza uguale a quella di A.
L'insieme dei punti di una circonferenza e dei suoi punti interni si chiama cerchio.

Un poligono è l'insieme dei punti di una poligonale chiusa e non intrecciata e di tutti i suoi punti interni. Un poligono con tutti i lati congruenti è equilatero, con tutti gli angoli congruenti è equiangolo. Un poligono è regolare se è equilatero ed equiangolo.

Il punto medio di un segmento è il punto che lo divide in due segmenti congruenti.
La bisettrice di un angolo è la semiretta uscente dal vertice che divide l'angolo in due angoli congruenti.
Un angolo retto è la metà di un angolo piatto.
Un angolo acuto è minore di un angolo retto.
Un angolo ottuso è maggiore di un angolo retto e minore di un angolo piatto.
Due angoli si dicono:
complementari se la loro somma è un angolo retto;
supplementari se la loro somma è un angolo piatto;
esplementari se la loro somma è un angolo giro.

Due angoli sono opposti al vertice se hanno in comune il vertice e i lati di un angolo sono i prolungamenti dei lati dell'altro.

Rivediamo ora le principali figure piane.
Il perimetro è la somma della lunghezza dei lati che costituiscono un certo poligono o figura piana.
L'area è invece la zona di piano delimitata da tale perimetro.
Il triangolo è un insieme dei punti del piano costituito da una poligonale chiusa di tre lati e dai suoi punti interni. Il triangolo è quindi un poligono avente tre lati (perimetro = a + b + c e area = base · altezza /2).
Classificazione rispetto ai lati: se un triangolo ha i tre lati congruenti si dice equilatero, se ha due lati congruenti si dice isoscele, mentre se ha i tre lati fra loro non congruenti si dice scaleno.
Classificazione rispetto agli angoli: se il triangolo ha un angolo retto si dice rettangolo, se ha un angolo ottuso si dice ottusangolo, mentre se ha tutti gli angoli acuti si dice acutangolo.
In un triangolo rettangolo la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa (teorema di Pitagora): $c1^2 + c2^2 = i^2$, dove *c1* e *c2* rappresentano i due cateti e *i* l'ipotenusa del triangolo.
La somma degli angoli interni di un qualunque triangolo è congruente a un angolo piatto.
Il parallelogramma è un quadrilatero avente i lati opposti paralleli.
Il rettangolo è un parallelogramma avente i quattro angoli congruenti (retti) e le diagonali congruenti (perimetro = 2·base + 2·altezza e area = base · altezza)
Il rombo è un parallelogramma avente i quattro lati congruenti e in cui le diagonali sono perpendicolari e bisettrici degli angoli (perimetro = 4·L e area = L^2).
Il quadrato è un parallelogramma avente i quattro angoli, i quattro lati congruenti e le diagonali congruenti, perpendicolari e bisettrici degli angoli (perimetro = 4·L e area = L^2).
Il trapezio è un quadrilatero avente due soli lati paralleli: un trapezio isoscele è un trapezio avente i lati obliqui congruenti, mentre un trapezio rettangolo è un trapezio in cui uno dei lati è perpendicolare alle basi (perimetro = somma di tutti i lati e area = (base maggiore + base minore) · altezza /2)).

ESERCIZI

1) Scrivi il numero mancante al posto dei puntini:

$13+\ldots\ldots=97;\quad 27-\ldots\ldots=11;\quad 12\cdot\ldots\ldots=48;\quad 129:\ \ldots\ldots=43$

2) Indica quali delle seguenti operazioni sono possibili in **N**.
$19:3;\quad 10+100;\quad 14-2;\quad 3\cdot 0;\quad 7-7;\quad 5-7;\quad 20:5$

3) Calcola il valore delle seguenti potenze:
$0^1;\quad 2^0;\quad 3^1;\quad 5^2;\quad 10^3\ 20^3;\quad 11^0;\quad 7^2;\quad 10^1;\quad 0^3.$

4) Calcola il valore delle espressioni:

$\{[7\cdot(21-10)]:[3+(48:6)]+8\}:\{[31-3\cdot(18:3)]-8\}$ [3]

$[(3^2)^2-2^2]:(11^3:11^2)+[3^3:(3^0+2)-2^2+(3^2)^0]$ [13]

4) Scrivi l'espressione relativa a ciascuna frase e calcolane il risultato:
«Dividi la somma di 29 e 23 per la differenza tra 22 e 18, poi somma 8 al risultato [21]
«Somma 10 al prodotto di 3 per la differenza fra 60 e 35». [85]

5) Calcola il valore che assume la seguente espressione sostituendo ad *a* e *b* i valori indicati.

$a^2-2b-a(b-1);$
$a=4, b=3; a=2, b=1; a=5, b=2.$ [2; 2; 16]

6) Calcola il valore delle seguenti espressioni applicando le proprietà delle potenze:

$[(4^4:4^3)+2]^2-(12-3^2)^3:(24:2^3)$ [27]

$\{[(2^5)^3:4^6+2]^2:5^2+20\}:2^3$ [3]

7) Scomponi in fattori primi i seguenti numeri:
39; 540; 176; 1320.

8) Calcola il M.C.D. e il m.c.m. fra i seguenti gruppi di numeri:

a. 18, 27;
b. 7, 10, 14;
c. 6, 20, 22, 44.

9) Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a. $+6-\{+4-[+3-(-6+7+2)]-6\}-\{[+2-(-6+4)]-7\}$
b. $4\cdot\{10+[2\cdot(6\cdot 2-5\cdot 3)]-2\}-6\cdot\{[(6-2)\cdot 3-4]-5\}$

c. $\{[(+15):(-3)-2]+5-2\}:(-2)-\{7\cdot[4-3\cdot(-2)]+(-8)(+4\cdot 2)\}$

[a. +11; b. -10; c. -4]

10) Calcola il valore delle seguenti espressioni applicando le proprietà delle potenze:

$\{[(-3)^6\cdot(-3)\cdot(-3)^0]^2:[(-3)^4\cdot(-3)^2]\}:(-3)^7$ [-3]

$\{[(+8)^3(+8)^8]:[(-8)^2]^3\}:\{(-8)^7:[(+2)^2(-4)^2]\}$ [-1]

11) Traduci in una espressione numerica la seguente frase e calcolane il risultato:

«Dividi la differenza tra 15 e la somma di 4 e del prodotto di 3 per 2, per la somma di 3 e 2, sottrai al risultato la somma di 5 e del prodotto di 3 per -2.» [2]

12) Risolvi il seguente problema utilizzando i numeri interi:
In giro per negozi Giulia spende € 23 in profumeria e € 14 in libreria. Preleva allo sportello automatico € 30, poi cena in pizzeria spedendo € 11. Quanti euro aveva inizialmente in tasca se alla fine le rimangono € 12? [€ 30]

13) Determina le frazioni che sono equivalenti alla prima assegnata:

$\mathbf{\frac{18}{4}};\ \frac{36}{5},\frac{36}{8},\frac{72}{10},\frac{72}{16},\frac{9}{2},\frac{2}{9},\frac{3}{10},\frac{4}{11}$

14) Calcola il valore delle seguenti espressioni:

$$\left[\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]:\frac{5}{6}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-\left[\frac{1}{3}\cdot\left(2+\frac{1}{4}\right)-\frac{2}{3}\right]-\frac{1}{6}$$

[-2]

$$\frac{\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{10}:\frac{3}{4}\right)\right]\cdot\frac{5}{3}-\frac{4}{9}}{\left[\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{5}\right):\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\right)-1+\frac{1}{5}\right]\cdot\frac{1}{3}}$$

[5/7]

15) Calcola il valore dell'espressione applicando le proprietà delle potenze:

$$\left[\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^7:\left(-\frac{1}{5}\right)^2\right]:\left[\left(-\frac{1}{5}\right)^3\right]^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2:\left(\frac{15}{4}\right)^2$$

[-4/25]

16) Traduci in espressione la seguente frase e calcolane il valore.
Somma il triplo di $\frac{2}{9}$ con l'opposto del prodotto tra il quadrato di $-\frac{2}{3}$ e la frazione $\frac{5}{6}$; dividi per il cubo di $\frac{2}{3}$ e moltiplica per il reciproco di -4 . [-1/4]

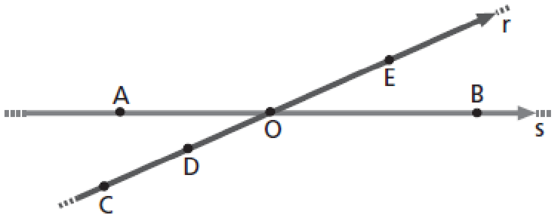
17) Trasforma i seguenti numeri decimali in frazioni:
$2{,}24$; $2{,}\overline{24}$; $2{,}0\overline{24}$; $2{,}002\overline{4}$; $2{,}2\overline{4}$.

18) Calcola il valore della seguente espressione dopo aver trasformato i numeri decimali in frazioni:

$$\frac{1}{2}+0{,}8:\left[\left(0{,}1\overline{36}+0{,}5-\frac{3}{11}\right)^2:\left(0{,}\overline{05}+\frac{13}{18}-0{,}0\overline{45}\right)\right]$$

[49/10]

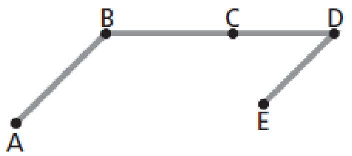
19) Il verso di percorrenza delle due rette *r* e *s* è indicato in figura dalle frecce.



Solo una fra le seguenti affermazioni è *vera*. Quale?

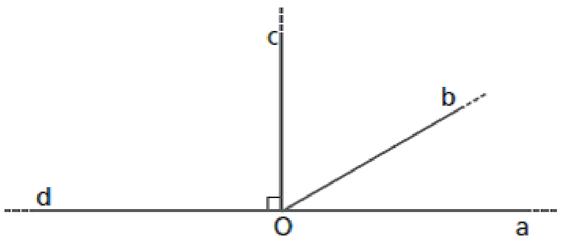
A Il punto *O* precede il punto *A*.
B Il punto *C* precede i punti *D* ed *E*.
C Il punto *E* segue il punto *A*.
D Il punto *B* segue il punto *D*.
E Le posizioni dei punti *A* e *B* non sono confrontabili.

20) Dei segmenti in figura possiamo affermare che:



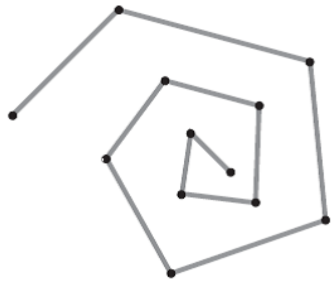
A *AB* e *BC* consecutivi, *BC* e *CD* adiacenti.
B *AB* e *BC* adiacenti, *BC* e *CD* consecutivi.
C *AB* e *BC* adiacenti, *CD* e *DE* incidenti.
D *BC* e *CD* sovrapposti, *AB* e *DE* paralleli.
E *BC* e *CD* adiacenti, *CD* e *DE* attaccati.

21) Degli angoli in figura possiamo affermare che:



A $a\hat{O}b$ e $b\hat{O}c$ complementari, $b\hat{O}c$ e $c\hat{O}d$ supplementari.
B $a\hat{O}b$ e $b\hat{O}c$ adiacenti, $a\hat{O}b$ e $b\hat{O}c$ supplementari.
C $c\hat{O}d$ retto, $c\hat{O}b$ e $b\hat{O}a$ supplementari.
D $d\hat{O}c$ ottuso, $c\hat{O}b$ e $b\hat{O}a$ consecutivi.
E $d\hat{O}b$ e $b\hat{O}a$ adiacenti, $b\hat{O}a$ acuto.

22) Quella rappresentata in figura è:

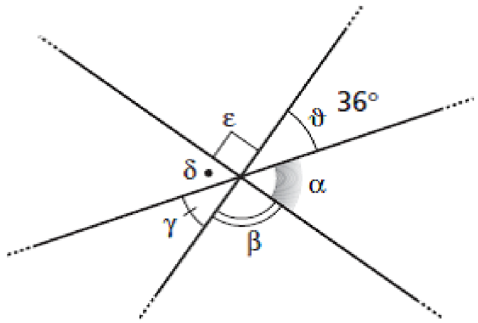


A una linea intrecciata e aperta.
B una poligonale intrecciata e aperta.
C una poligonale semplice e chiusa.
D una linea semplice e chiusa.
E una poligonale semplice e aperta.

23) Indica quale delle seguenti affermazioni è *falsa*.

A Due figure uguali sono congruenti.
B Due figure congruenti hanno la stessa area.
C Due figure che hanno la stessa area sono congruenti.
D Due figure uguali hanno la stessa area.
E Due figure che sono congruenti con una terza figura sono anche congruenti tra loro.

24) Indica quale delle seguenti affermazioni riferite alla figura è *falsa*.

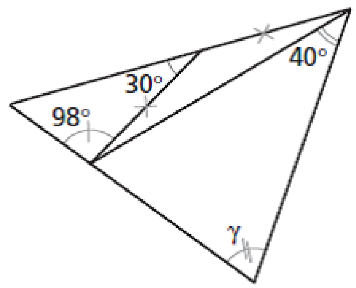


A ϑ è complementare di δ .
B $\varepsilon - \gamma = 54°$.
C δ è complementare di γ .
D $\varepsilon + \vartheta$ è supplementare di γ .
E $\alpha + \beta = 144°$.

25) Indica quale delle seguenti affermazioni è *falsa*.

A La distanza tra due punti è la lunghezza del segmento che congiunge i due punti.
B Due angoli congruenti hanno la stessa ampiezza.
C Due segmenti congruenti hanno la stessa lunghezza.
D La distanza tra due punti è la linea che congiunge i due punti.
E Il punto medio di un segmento divide il segmento in due segmenti congruenti.

26) Osservando la figura si ricava che l'ampiezza dell'angolo γ è:



A 55°.
B 73°.
C 52°.
D 63°.
E 58°.

27) Calcola area e perimetro di un triangolo rettangolo avente i cateti lunghi 18 m e 24 m.

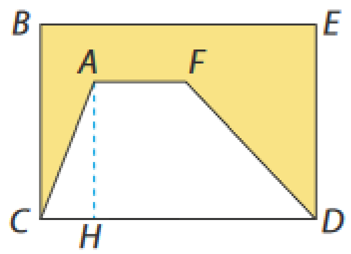
[216 m^2;72m]

28) La base e l'altezza di un rettangolo misurano, rispettivamente, 30 cm e 40 cm; dopo aver calcolato il perimetro e l'area, calcolare la misura della diagonale.

[140 cm; 1200 cm^2; 50 cm]

29) Calcola l'area del poligono concavo BCAFDE sapendo che:
CD=10 cm
BC=8 cm
AF=4 cm
AH=6 cm

[38 cm^2]



30) Determinare l'area del poligono S concavo tramite somma delle aree del rettangolo, del trapezio e del triangolo.

[6 m^2]